

Kombinatorika v topologii a opačně

Seminář matematiky a informatiky

Michael Skotnica

7. května 2025

Ústav geoniky Akademie věd České republiky

1. Historie
 - Borsuk-Ulamova věta a její aplikace
2. Topologický úvod
3. Simplicciální komplexy jako kombinatorický popis topologických prostorů
4. Vlastnosti simplicciálních komplexů, jejich vztahy a výpočetní složitost
 - Kolabovatelnost
 - Shellovatelnost



Obrázek 1: Bývalá Skotská kavárna (Kawiarnia Szkocka) ve Lvově,
autor: Mykola Swarnyk, zdroj: Wikipedia, CC BY-SA 3.0

Znění

- Pokud $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, pak existuje $x \in S^n$ takové, že $f(x) = f(-x)$.

Znění

- Pokud $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, pak existuje $x \in S^n$ takové, že $f(x) = f(-x)$.
- Publikována 1933

Znění

- Pokud $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, pak existuje $x \in S^n$ takové, že $f(x) = f(-x)$.
- Publikována 1933

„Praktické“ pseudoaplikace

- Pro každé vyfouknutí míče existují dva antipodální body, které po splasknutí skončí na sobě.

Znění

- Pokud $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, pak existuje $x \in S^n$ takové, že $f(x) = f(-x)$.
- Publikována 1933

„Praktické“ pseudoaplikace

- Pro každé vyfouknutí míče existují dva antipodální body, které po splasknutí skončí na sobě.
- Na rovníku existují dva antipodální body, ve kterých je stejná teplota.

Znění

- Pokud $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, pak existuje $x \in S^n$ takové, že $f(x) = f(-x)$.
- Publikována 1933

„Praktické“ pseudoaplikace

- Pro každé vyfouknutí míče existují dva antipodální body, které po splasknutí skončí na sobě.
- Na rovníku existují dva antipodální body, ve kterých je stejná teplota.
- Na Zemi existují dva antipodální body, ve kterých je stejná teplota a stejný tlak.

Definice

- Kneserův graf $K_{n,k}$ pro $k, n \in \mathbb{N}_0$, kde $2k \leq n$

Definice

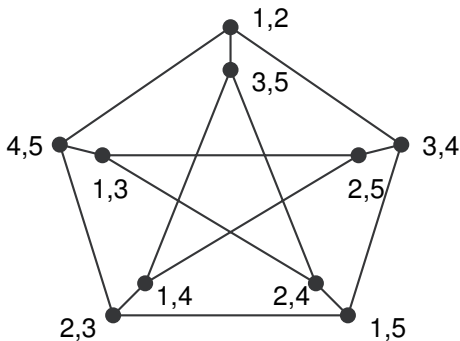
- Kneserův graf $K_{n,k}$ pro $k, n \in \mathbb{N}_0$, kde $2k \leq n$
 - Vrcholy jsou k -prvkové podmnožiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definice

- Kneserův graf $K_{n,k}$ pro $k, n \in \mathbb{N}_0$, kde $2k \leq n$
 - Vrcholy jsou k -prvkové podmnožiny $\{1, 2, \dots, n\}$.
 - Dvě množiny jsou spojené hranou právě tehdy, když jsou disjunktní.

Definice

- Kneserův graf $K_{n,k}$ pro $k, n \in \mathbb{N}_0$, kde $2k \leq n$
 - Vrcholy jsou k -prvkové podmnožiny $\{1, 2, \dots, n\}$.
 - Dvě množiny jsou spojené hranou právě tehdy, když jsou disjunktní.



Obrázek 2: Kneserův graf $K_{5,2}$

Úloha

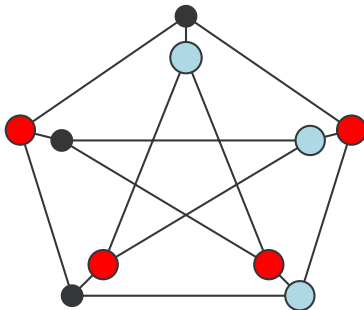
- Chceme najít co nejmenší počet barev potřebných k obarvení vrcholů grafu tak, že žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu.

Úloha

- Chceme najít co nejmenší počet barev potřebných k obarvení vrcholů grafu tak, že žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu.
- $K_{n,k}$ lze takto obarvit $n - 2k + 2$ barvami.
 - Martin Kneser 1956

Úloha

- Chceme najít co nejmenší počet barev potřebných k obarvení vrcholů grafu tak, že žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu.
- $K_{n,k}$ lze takto obarvit $n - 2k + 2$ barvami.
 - Martin Kneser 1956



Obrázek 3: Obarvení $K_{5,2}$ pomocí 3 barev.

Úloha

- Chceme najít co nejmenší počet barev potřebných k obarvení vrcholů grafu tak, že žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu.
- $K_{n,k}$ lze takto obarvit $n - 2k + 2$ barvami.
 - Martin Kneser 1956

Otázka: Lze $K_{n,k}$ obarvit pomocí méně barev?

Úloha

- Chceme najít co nejmenší počet barev potřebných k obarvení vrcholů grafu tak, že žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu.
- $K_{n,k}$ lze takto obarvit $n - 2k + 2$ barvami.
 - Martin Kneser 1956

Otázka: Lze $K_{n,k}$ obarvit pomocí méně barev?

- Nelze!
 - László Lovász 1978, krátce nato Imre Bárány
 - Oba použili Borsuk-Ulamovu větu.

Úloha

- Chceme najít co nejmenší počet barev potřebných k obarvení vrcholů grafu tak, že žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu.
- $K_{n,k}$ lze takto obarvit $n - 2k + 2$ barvami.
 - Martin Kneser 1956

Otázka: Lze $K_{n,k}$ obarvit pomocí méně barev?

- Nelze!
 - László Lovász 1978, krátce nato Imre Bárány
 - Oba použili Borsuk-Ulamovu větu.
 - První čistě kombinatorický důkaz sestrojil až Jiří Matoušek v roce 2002.

Úloha

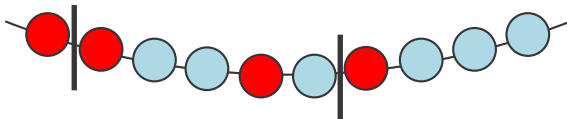
- Mějme náhrdelník obsahující kuličky t barev.
- Od každé barvy je sudý počet kuliček.

Úloha

- Mějme náhrdelník obsahující kuličky t barev.
- Od každé barvy je sudý počet kuliček.
- Chceme rozdělit náhrdelník mezi 2 zloděje pomocí co nejmenšího počtu „řezů“ tak, aby oba zloději dostali od každé barvy stejný počet kuliček.

Úloha

- Mějme náhrdelník obsahující kuličky t barev.
- Od každé barvy je sudý počet kuliček.
- Chceme rozdělit náhrdelník mezi 2 zloděje pomocí co nejmenšího počtu „řezů“ tak, aby oba zloději dostali od každé barvy stejný počet kuliček.



Obrázek 3: Spravedlivé rozdělení náhrdelníku obsahující 4 červené a 6 modrých kuliček pomocí 2 řezů.

Úloha

- Mějme náhrdelník obsahující kuličky t barev.
- Od každé barvy je sudý počet kuliček.
- Chceme rozdělit náhrdelník mezi 2 zloděje pomocí co nejmenšího počtu „řezů“ tak, aby oba zloději dostali od každé barvy stejný počet kuliček.

Řešení

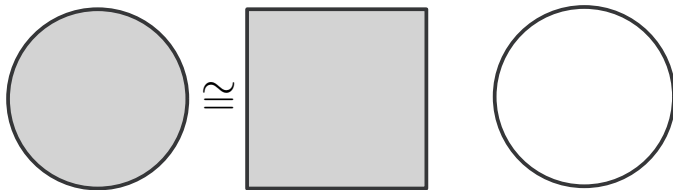
- Vždy lze rozdělit pomocí t řezů, kde t je počet barev.
 - Noga Alon, Douglas B. West 1986

Úloha

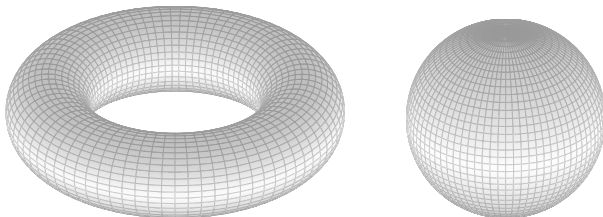
- Mějme náhrdelník obsahující kuličky t barev.
- Od každé barvy je sudý počet kuliček.
- Chceme rozdělit náhrdelník mezi 2 zloděje pomocí co nejmenšího počtu „řezů“ tak, aby oba zloději dostali od každé barvy stejný počet kuliček.

Řešení

- Vždy lze rozdělit pomocí t řezů, kde t je počet barev.
 - Noga Alon, Douglas B. West 1986
 - Také za pomoci Borsuk-Ulamovy věty



Obrázek 3: Dvourozměrné „koule“ (vlevo a uprostřed), jednorozměrná „sféra“ (vpravo).

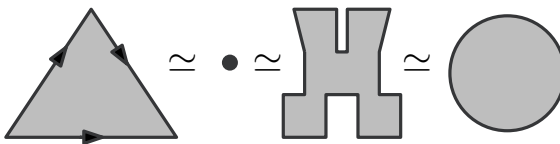


Obrázek 4: Dvourozměrný torus (vlevo), dvourozměrná sféra (vpravo).

- Topologickým prostorům přiřazujeme různé objekty a parametry, které je popisují.
 - Eulerova charakteristika
 - Bettiho čísla
 - Homologické a homotopické grupy

- Topologickým prostorům přiřazujeme různé objekty a parametry, které je popisují.
 - Eulerova charakteristika
 - Bettiho čísla
 - Homologické a homotopické grupy
- Takové parametry a objekty jsou invariantní vůči „spojité deformaci“.
 - Jsou stejné pro homotopicky ekvivalentní prostory.

- Topologickým prostorům přiřazujeme různé objekty a parametry, které je popisují.
 - Eulerova charakteristika
 - Bettiho čísla
 - Homologické a homotopické grupy
- Takové parametry a objekty jsou invariantní vůči „spojité deformaci“.
 - Jsou stejné pro homotopicky ekvivalentní prostory.



Obrázek 5: Kontrahovatelné topologické prostory.



Obrázek 6: Symbol pro dopravní značky ve Velké Británii znázorňující fotbalový stadion.

Definice

- Počet vrcholů - počet hran + počet stěn

Fotbalový míč nelze poskládat ze samých šestiúhelníků

Definice

- Počet vrcholů - počet hran + počet stěn

Fotbalový míč nelze poskládat ze samých šestiúhelníků

- Fotbalový míč je dvourozměrná sféra s Eulerovou charakteristikou 2.

Definice

- Počet vrcholů - počet hran + počet stěn

Fotbalový míč nelze poskládat ze samých šestiúhelníků

- Fotbalový míč je dvourozměrná sféra s Eulerovou charakteristikou 2.
- Pro spor předpokládejme, že jsme míč poskládali z n šestiúhelníků.

Máme:

- n stěn,
- $\frac{6n}{2} = 3n$ hran,
- $\frac{6n}{3} = 2n$ vrcholů.

Definice

- Počet vrcholů - počet hran + počet stěn

Fotbalový míč nelze poskládat ze samých šestiúhelníků

- Fotbalový míč je dvourozměrná sféra s Eulerovou charakteristikou 2.
- Pro spor předpokládejme, že jsme míč poskládali z n šestiúhelníků.

Máme:

- n stěn,
 - $\frac{6n}{2} = 3n$ hran,
 - $\frac{6n}{3} = 2n$ vrcholů.
- Dostáváme Eulerovu charakteristiku $2n - 3n + n = 0$, což je spor.

Definice

- Počet vrcholů - počet hran + počet stěn

Fotbalový míč nelze poskládat ze samých šestiúhelníků

- Fotbalový míč je dvourozměrná sféra s Eulerovou charakteristikou 2.
- Pro spor předpokládejme, že jsme míč poskládali z n šestiúhelníků.

Máme:

- n stěn,
 - $\frac{6n}{2} = 3n$ hran,
 - $\frac{6n}{3} = 2n$ vrcholů.
- Dostáváme Eulerovu charakteristiku $2n - 3n + n = 0$, což je spor.
 - Ze samých šestiúhelníků ale můžeme poskládat torus.

Definice

1. Kombinatorická reprezentace topologických prostorů
2. Konečný soubor množin $\mathbf{K}$ uzavřený na podmnožiny
 - Pokud $\sigma' \subseteq \sigma$, pak $\sigma' \in K$

Definice

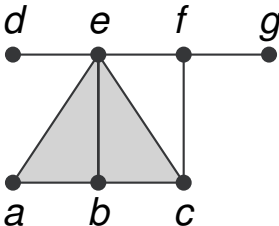
1. Kombinatorická reprezentace topologických prostorů
2. Konečný soubor množin $\mathbf{K}$ uzavřený na podmnožiny
 - Pokud $\sigma' \subseteq \sigma$, pak $\sigma' \in K$

$\{\emptyset,$

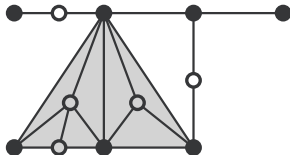
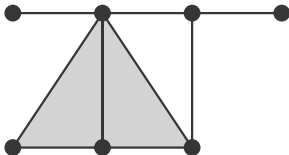
$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\},$

$\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{g, f\},$

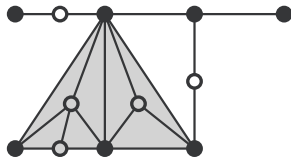
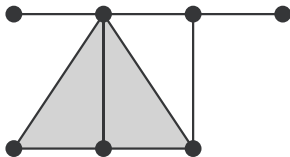
$\{a, b, e\}, \{b, c, e\}\}$



- Podrozdělení

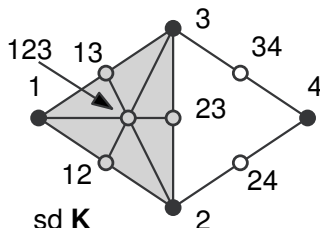
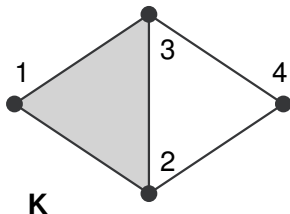


- Podrozdělení



- Barycentrické podrozdělení

$$\text{sd } K := \{ \{ \sigma_1, \dots, \sigma_n \} : \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbf{K}, \emptyset \neq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_n \}$$



Vnoření do Euklidovského prostoru

- Jaké je minimální n takové, že každý d -dimenzionální simpliciální komplex lze realizovat v $\mathbb{R}^n$?

Vnoření do Euklidovského prostoru

- Jaké je minimální n takové, že každý d -dimenzionální simpliciální komplex lze realizovat v $\mathbb{R}^n$?

Algoritmické problémy

- Jak těžké je pro simpliciální komplex rozhodnout, jestli lze realizovat v $\mathbb{R}^n$?

Vnoření do Euklidovského prostoru

- Jaké je minimální n takové, že každý d -dimenzionální simpliciální komplex lze realizovat v $\mathbb{R}^n$?

Algoritmické problémy

- Jak těžké je pro simpliciální komplex rozhodnout, jestli lze realizovat v $\mathbb{R}^n$?
- Jak těžké je pro topologický prostor zadaný simpliciálním komplexem rozhodnout, zda je kontrahovatelný?

Vnoření do Euklidovského prostoru

- Jaké je minimální n takové, že každý d -dimenzionální simpliciální komplex lze realizovat v $\mathbb{R}^n$?

Algoritmické problémy

- Jak těžké je pro simpliciální komplex rozhodnout, jestli lze realizovat v $\mathbb{R}^n$?
- Jak těžké je pro topologický prostor zadaný simpliciálním komplexem rozhodnout, zda je kontrahovatelný?
 - Pro dimenzi ≥ 4 nerozhodnutelné
 - Pro dimenze 2 a 3 otevřený problém, zda to lze

Definice

Výpočetní problém je

- ve třídě NP, pokud jsme jeho řešení schopni ověřit v polynomiálním čase.

Definice

Výpočetní problém je

- ve třídě NP, pokud jsme jeho řešení schopni ověřit v polynomiálním čase.
- NP-těžký, pokud je na něj každý problém ze třídy NP převoditelný v polynomiálním čase.

Definice

Výpočetní problém je

- ve třídě NP, pokud jsme jeho řešení schopni ověřit v polynomiálním čase.
- NP-těžký, pokud je na něj každý problém ze třídy NP převoditelný v polynomiálním čase.
- NP úplný, pokud je ve třídě NP a zároveň je NP-těžký

Definice

Výpočetní problém je

- ve třídě NP, pokud jsme jeho řešení schopni ověřit v polynomiálním čase.
- NP-těžký, pokud je na něj každý problém ze třídy NP převoditelný v polynomiálním čase.
- NP úplný, pokud je ve třídě NP a zároveň je NP-těžký

Domněnka

Pokud je problém NP těžký, nelze ho vyřešit v polynomiálním čase.

Definice

Výpočetní problém je

- ve třídě NP, pokud jsme jeho řešení schopni ověřit v polynomiálním čase.
- NP-těžký, pokud je na něj každý problém ze třídy NP převoditelný v polynomiálním čase.
- NP úplný, pokud je ve třídě NP a zároveň je NP-těžký

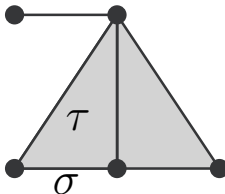
Domněnka

Pokud je problém NP těžký, nelze ho vyřešit v polynomiálním čase.

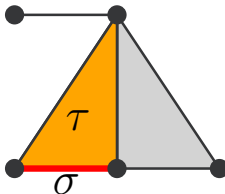
Příklad

- 3-SAT $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$

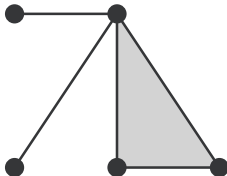
- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



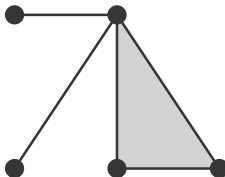
- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$

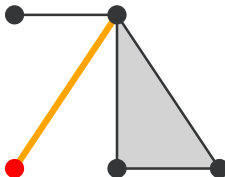


- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



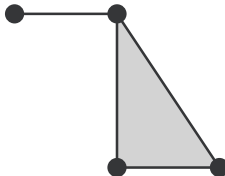
- Simpliciální komplex K je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



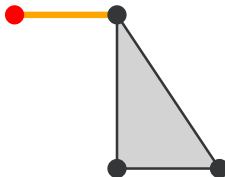
- Simpliciální komplex K je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



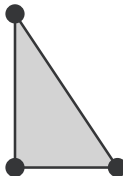
- Simpliciální komplex K je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



- Simplicial complex K is *kolabovatelný*, if there exists a sequence of elementary collapses, which will create a 1-point complex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



- Simpliciální komplex K je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



- Simpliciální komplex K je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



- Simpliciální komplex K je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



- Simplicial complex K is *kolabovatelný*, if there exists a sequence of elementary collapses, which turn it into a 1-point complex.

- Elementární kolaps
 - $\mathbf{K} \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



- Simplicial complex $\mathbf{K}$ is *kolabovatelný* (collapsible), if there exists a sequence of elementary collapses, which will create a 1-point complex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



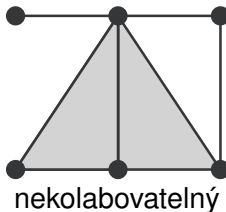
- Simplicial complex K is *kolabovatelný* (collapsible), if there exists a sequence of elementary collapses, which will create a 1-point complex.

- Elementární kolaps
 - $\mathbf{K} \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



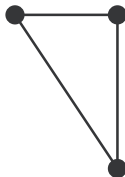
- Simpliciální komplex $\mathbf{K}$ je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



- Simplicialní komplex K je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

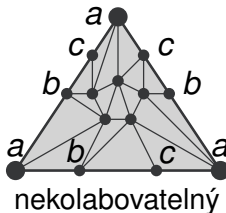
- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



nekolabovatelný

- Simplicialní komplex K je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

- Elementární kolaps
 - $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, kde τ je jediná stěna taková, že $\sigma \subsetneq \tau$



- Simplicialní komplex K je *kolabovatelný*, pokud pro něj existuje posloupnost elementárních kolapsů, které z něj vytvoří 1-bodový komplex.

Algoritmické problémy

- Jak těžké je pro simplicialní komplex rozhodnout, zda je kolabovatelný?

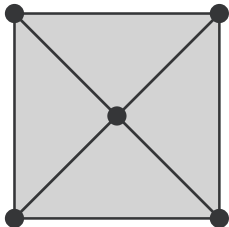
Algoritmické problémy

- Jak těžké je pro simplicialní komplex rozhodnout, zda je kolabovatelný?
 - Pro dimenzi 2 existuje polynomiální algoritmus.
 - Pro dimenzi ≥ 3 NP-těžké.
 - Martin Tancer 2016

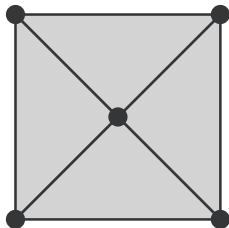
- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simplicialní komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.

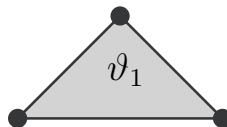
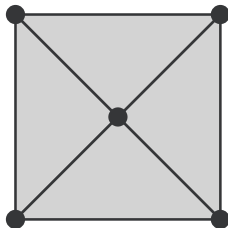


- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



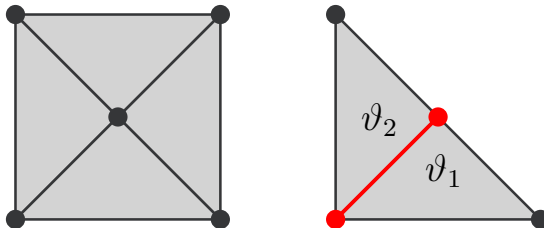
- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



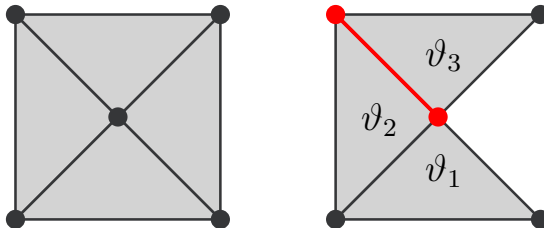
- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



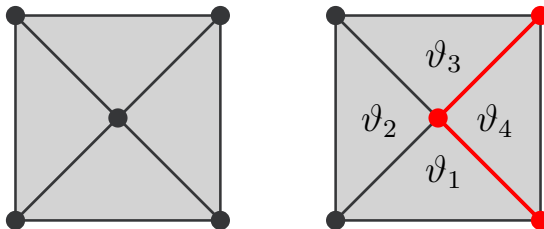
- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



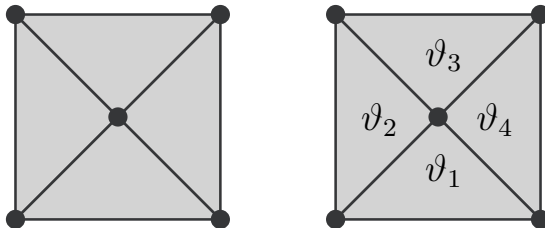
- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



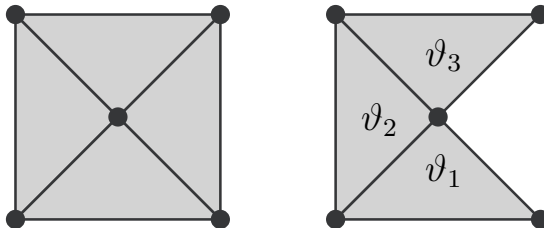
- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



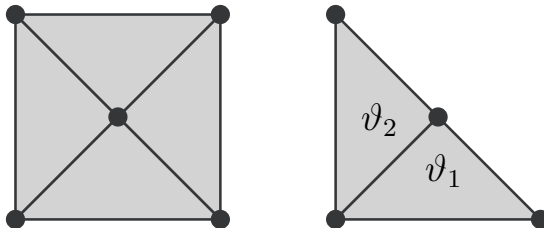
- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



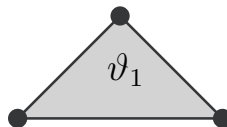
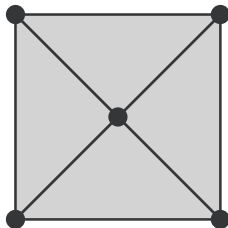
- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



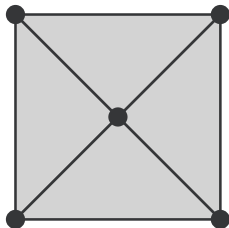
- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



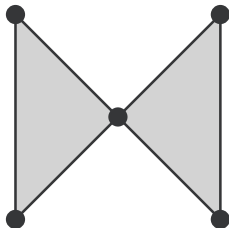
- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

- Faseta
 - Stěna největší velikosti, co se týče inkluze
 - Simpliciální komplex je *pure*, pokud všechny fasety mají stejnou velikost.



není shellovatelný

- Pure d -dimenzionální $\mathbf{K}$ je *shellovatelný*, pokud existuje uspořádání $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ of jeho faset takové, že „překryv“ ϑ_k a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \vartheta_i$ je pure a $(d-1)$ -dimenzionální pro každé $k \geq 2$.

Algoritmické problémy

- Jak těžké je pro simplicciální komplex rozhodnout, zda je shellovatelný?

Algoritmické problémy

- Jak těžké je pro simplicialní komplex rozhodnout, zda je shellovatelný?
 - NP-těžké už od dimenze 2
 - Xavier Goaoc, Pavel Paták, Zuzana Patáková, Martin Tancer, Uli Wagner 2018

Algoritmické problémy

- Jak těžké je pro simplicialní komplex rozhodnout, zda je shellovatelný?
 - NP-těžké už od dimenze 2
 - Xavier Goaoc, Pavel Paták, Zuzana Patáková, Martin Tancer, Uli Wagner 2018
 - NP-těžké pro d -dimenzionální koule, $d \geq 3$
 - Pavel Paták, Martin Tancer 2024

Vzájemné vztahy mezi kolabovatelností a shellovatelností

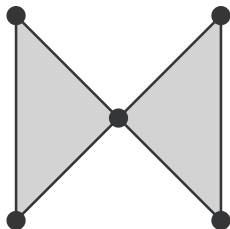
- Shellovatelnost implikuje kolabovatelnost, pokud je komplex kontrahovatelný.

Vzájemné vztahy mezi kolabovatelností a shellovatelností

- Shellovatelnost implikuje kolabovatelnost, pokud je komplex kontrahovatelný.
- Opačná implikace obecně neplatí:

Vzájemné vztahy mezi kolabovatelností a shellovatelností

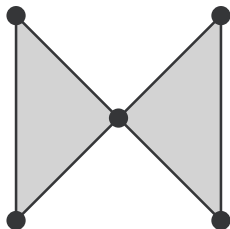
- Shellovatelnost implikuje kolabovatelnost, pokud je komplex kontrahovatelný.
- Opačná implikace obecně neplatí:



kolabovatelný,
ale není shellovatelný

Vzájemné vztahy mezi kolabovatelností a shellovatelností

- Shellovatelnost implikuje kolabovatelnost, pokud je komplex kontrahovatelný.
- Opačná implikace obecně neplatí:

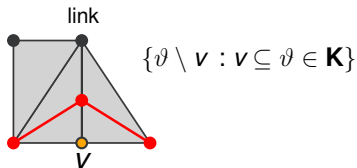


kolabovatelný,
ale není shellovatelný

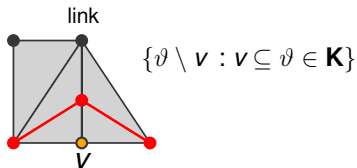
- Za jakých podmínek opačná implikace platí?

- Masahiro Hachimori v roce 2008 ukázal vztah pro dimenzi 2.

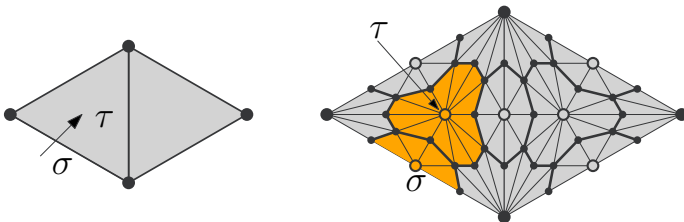
- Masahiro Hachimori v roce 2008 ukázal vztah pro dimenzi 2.
- Necht $\mathbf{K}$ je 2-dimenzionální kolabovatelný komplex.
 - Pokud je link každého vrcholu $\mathbf{K}$ souvislý,



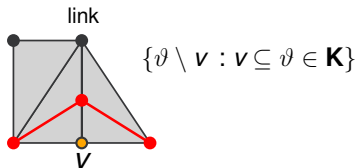
- Masahiro Hachimori v roce 2008 ukázal vztah pro dimenzi 2.
- Necht $\mathbf{K}$ je 2-dimenzionální kolabovatelný komplex.
 - Pokud je link každého vrcholu $\mathbf{K}$ souvislý,



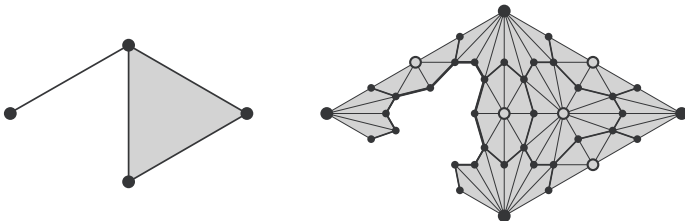
- pak je možné simulovat kolapsy reverzním shellováním $\text{sd}^2 \mathbf{K}$.



- Masahiro Hachimori v roce 2008 ukázal vztah pro dimenzi 2.
- Necht $\mathbf{K}$ je 2-dimenzionální kolabovatelný komplex.
 - Pokud je link každého vrcholu $\mathbf{K}$ souvislý,



- pak je možné simulovat kolapsy reverzním shellováním $\text{sd}^2 \mathbf{K}$.



Hachimoriho věta

Nechť $\mathbf{K}$ je 2-dimenzionální simplicialní komplex. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. Komplex $\mathbf{K}$ má shellovatelné podrozdělení.
2. Druhé barycentrické podrozdělení $sd^2 \mathbf{K}$ je shellovatelné.
3. Link každého vrcholu je souvislý a $\mathbf{K}$ je kolabovatelný po odebrání $\tilde{\chi}(\mathbf{K})$ trojúhelníků, kde $\tilde{\chi}$ značí Eulerovu charakteristiku -1 .

Hachimoriho věta

Nechť $\mathbf{K}$ je 2-dimenzionální simplicialní komplex. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. Komplex $\mathbf{K}$ má shellovatelné podrozdělení.
2. Druhé barycentrické podrozdělení $sd^2 \mathbf{K}$ je shellovatelné.
3. Link každého vrcholu je souvislý a $\mathbf{K}$ je kolabovatelný po odebrání $\tilde{\chi}(\mathbf{K})$ trojúhelníků, kde $\tilde{\chi}$ značí Eulerovu charakteristiku -1 .

Lze tuto větu zobecnit pro vyšší dimenze?

- Hachimori ukázal, že implikace $1 \Rightarrow 2$ neplatí pro vyšší dimenze.

Hachimoriho věta

Nechť $\mathbf{K}$ je 2-dimenzionální simplicialní komplex. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. Komplex $\mathbf{K}$ má shellovatelné podrozdělení.
2. Druhé barycentrické podrozdělení $sd^2 \mathbf{K}$ je shellovatelné.
3. Link každého vrcholu je souvislý a $\mathbf{K}$ je kolabovatelný po odebrání $\tilde{\chi}(\mathbf{K})$ trojúhelníků, kde $\tilde{\chi}$ značí Eulerovu charakteristiku -1 .

Lze tuto větu zobecnit pro vyšší dimenze?

- Hachimori ukázal, že implikace $1 \Rightarrow 2$ neplatí pro vyšší dimenze.
- Je ale možné zobecnit $3 \Rightarrow 2$.
 - Thomas Magnard, MS, Martin Tancer 2019

Hachimoriho věta

Nechť $\mathbf{K}$ je 2-dimenzionální simplicialní komplex. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. Komplex $\mathbf{K}$ má shellovatelné podrozdělení.
2. Druhé barycentrické podrozdělení $sd^2 \mathbf{K}$ je shellovatelné.
3. Link každého vrcholu je souvislý a $\mathbf{K}$ je kolabovatelný po odebrání $\tilde{\chi}(\mathbf{K})$ trojúhelníků, kde $\tilde{\chi}$ značí Eulerovu charakteristiku -1 .

Lze tuto větu zobecnit pro vyšší dimenze?

- Hachimori ukázal, že implikace $1 \Rightarrow 2$ neplatí pro vyšší dimenze.
- Je ale možné zobecnit $3 \Rightarrow 2$.
 - Thomas Magnard, MS, Martin Tancer 2019
- Jestli lze zobecnit $2 \Rightarrow 3$ se zatím neví.